微分とは

2025/2/17 三谷純

『方丈記』の冒頭に「川の流れは絶えずして、しかも、もとの水にあらず」という言葉があります。私たちの身の回りにある、あらゆるものが常に変化しています。物事がどのように変化するかを知ることは、世の中のさまざまなことを理解するうえでとても重要です。この「変化」を数学的に捉えるための道具が「微分」です。

この文書で説明するもの

・グラフ上のある点における傾きを求める操作を**「微分」**といいます。

・グラフの接線の傾きによって、その点における値の変化率を知ることができます。接線の傾きを**「微分係数」**と言います。

・グラフが関数$f(x)$で表される場合、$x=a$における微分係数は次の式で表されます。

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

・微分係数をxの関数で表したものを**「導関数」**と言います。

・微分と積分は互いに密接な関係をもっています。

この文書で説明しないもの

$y=\sin x$の$x=0$における微分係数は１である、$y=x^2$の導関数は$2x$である、といった具体的な微分の計算は紹介しません。こういった計算方法や公式は一般的な教科書や参考書で詳しく説明されているのでそちらを参考にしましょう。

グラフ

私たちは、ものごとの状態の変化を表すために図１のような**グラフ**を使います。

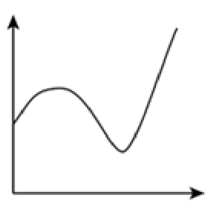

図１ グラフの例

横軸と縦軸でそれぞれ何の値を表すかによって、次のようにさまざまなものを表現できます。たとえば、横軸を「時刻」、縦軸を「駅から列車までの距離」とすれば、ある時刻に列車がどこにいるかを表すことができます。横軸を「時刻」としたままで、縦軸を「気温」や「気圧」としてもよいでしょう。横軸を「現在地からまっすぐ北に進んだ距離」として、縦軸を「標高」とすれば、グラフの形がそのまま地形を表すことになります。このように、さまざまなものごとの状態の変化をグラフを使って表すことができます。

グラフから読み取れるもの

こういったグラフから何を読み取ることができるでしょうか。先ほどのグラフの例では、ある時刻における列車の位置や気温、気圧を知ることができます。また、ある場所における標高を知ることができます。このように、ある値（時刻、場所など横軸の値）に対して、それに対応する値（位置、気温、気圧、標高など縦軸の値）を知ることができます。

グラフと関数

ある値をxとして、対応する値をyとしましょう。つまり、横軸をx、縦軸をyとします。ある値xを入れたら対応する値が出てくるものを関数fで表します。そうすると、グラフは$y = f(x)$という式で表現できます。図 2 のように、xが 1 のときの値は$f(1)$です。xの値がaという記号で表されるときのyの値は$f(a)$と表されます。

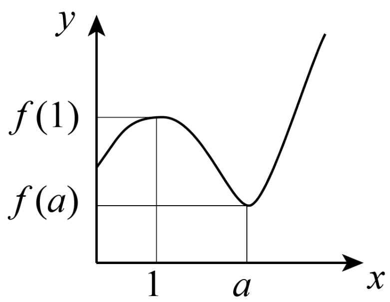

図 2 $y = f(x)$のグラフの例

グラフから読み取れるもの 1 つの大事な情報

もうひとつ、グラフから得られる大事な情報の一つに、<u>ある点における変化の様子</u>が挙げられます。

図 2 のグラフの横軸を時刻、縦軸を列車の駅からの距離としましょう。$x = 1$

の付近では、あまり値の違いがなくグラフが水平になっています。つまり、その前後で列車はほとんど移動していないことをグラフが水平であることから読み取ることができます。一方で、$x = a$ 以降では、傾きが急になっていて、列車は速い速度で駅から遠ざかっていることを読み取ることができます。また$x = 1$と$x = a$の区間では、傾きが負になっていますから、列車は駅に近づく方向に進んでいることが読み取れます。

　このように、グラフの傾きに注目すると、その時点における変化の様子を知ることができるのです。グラフの傾きを数学的に知る道具が「微分」です。

（メモ）
　ものごとには、その時の値だけではなくて、変化に着目した方が大事な情報を得られる場合があります。例えば、日々変化する気圧は、気圧そのものではなくて、気圧の変化が体調に与える影響が大きいので、変化に注目することが重要です。また、列車がいる位置そのものではなくて、位置がどのように変化するかに着目すると、列車の移動する方向や速さを知ることができます。

接線

　ある場所におけるグラフの傾きは、その点でグラフに接する直線、つまり「接線」、の傾きだと言えます。図 3 のようにグラフに接する直線を描いて、その接点付近を拡大して見てみると、直線とグラフの違いは小さくなっていきます。どんなにグラフの線が曲がっていても、ずーっと拡大して、接点の付近のごく狭い範囲だけに注目すると、ほとんど直線のように見えます。つまり、接点の近くにおいては、接線はそのグラフをよく近似している、ということができます（これを 1 次近似と言います）。

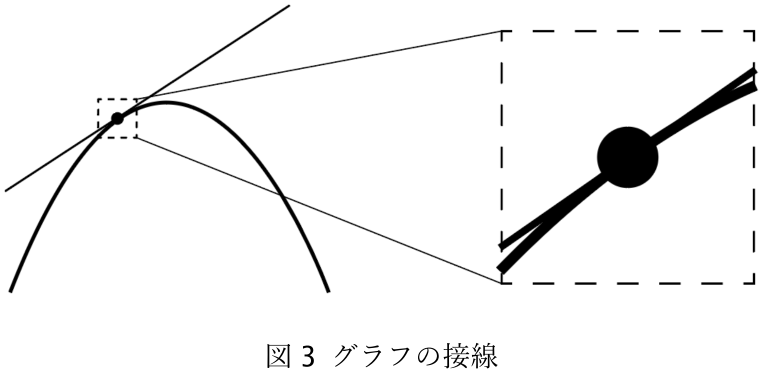

図 3 グラフの接線

接線の傾きの計算

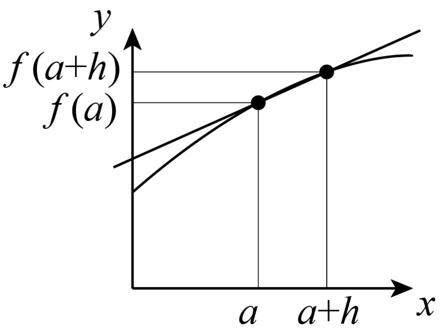

図 4 接線の傾き

$x = a$のときのグラフ上の点の座標は、$(a, f(a))$で表されます。この点における接線の傾きはどうやって知ることができるでしょうか。直線を定めるには、直線が通る 2 点を指定してあげる必要があります。そこで、この点とともに、少しだけxの値を増やしたグラフ上の点を結ぶ直線を作って、その傾きを調べます。少しだけ増やす量をhとすると、そのような点のx座標は$a + h$、y座標は$f(a + h)$で表されます。

直線の傾きは「 yの増加量 / xの増加量 」ですから、この 2 点を通る直線の傾きは

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a}$$

$$= \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

で表されます。冒頭の微分係数の式の一部分が登場しました。

微分係数の式

先ほどの式は、$(a, f(a))$ における接線の傾きを正確に表していませんが、hの値を小さくしていくにつれて、接線の傾きをより正確に表すようになります。

そこで、hの値を限りなく 0 に近づけたときの値を $x = a$ におけるグラフの傾きであると定義します。

ここでhを限りなくゼロに近づけるという意味の記号、$\lim_{h \to 0}$ を導入すると、$x = a$におけるグラフの傾きは

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

と表すことができます。これが冒頭に登場した、微分係数を求める式です。これを記号$f'(a)$で表します。微分係数を求める操作を「微分」といいます。

導関数

ようやく微分係数の式を紹介することができました。微分係数はxの値を１つ与えると、それに対応する値が１つ決まります。つまり、xの値に対応する微分係数を出力する関数というものを定義することができます。これが、「導関数」と呼ばれるものです。関数$f(x)$の導関数は記号$f'(x)$で表します[1]。関数$f(x)$の導関数とは、$f(x)$がどのように変化するかを表す関数ということができます。

（メモ）
導関数も関数ですから、これまでの話と同じようにして導関数の導関数というものを考えることができます。導関数の導関数を 2 次導関数といいます。

積分との関係

微分と積分は密接な関係があります。積分は小さなものを足しあげていって和を求める操作を行う数学的な道具です。例として、立体図形の体積を求める問題がよく取り上げられます。たとえば、ニンジンを薄くスライスして、そのスライスした１つ１つを薄い円柱と見立てて、すべての円柱の体積を足しあげると、もとのニンジンの体積が求まる。という考え方をします。スライスしたものの厚さが大きいときには精度が低いですが、厚さをゼロに近づけることでより正確な値を求めることができます。

しかし、このような積分の捉え方だと、微分と積分の関係があまり見えてきません。そこで、もう少し違う見方をしてみましょう。

差分から値を知る

私たちは、具体的な値よりも、値の変化に注目することが多くあります。たとえば、2 月 2 日は前の日との比較で気圧が 10hPa（ヘクトパスカル）上がったことがわかったとします。2 月 3 日は前日より 2hPa 下がった、そして 2 月 4 日は前日より 8hPa 下がった、という具合に気圧の変化を記録していたとしましょう。この情報から、私たちは図 5 のようなグラフを作ることができて、2 月 4 日の気圧は 2 月 1 日と同じだということを知ることができます。

[1] 導関数を求める操作もまた「微分」と呼ばれます。

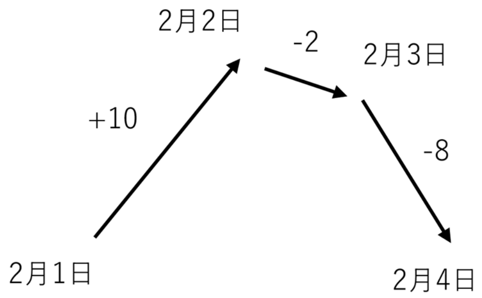

図 5 差分から復元するグラフ

現在の値と、1 つ前の値の差を「差分」といいます。差分がわかれば、値に関する情報を得ることができて、グラフの「形」を復元できます。ただし、2 月 1 日の気圧がわからないと、実際の値を知ることができません。言い方を変えれば、2 月 1 日の気圧さえわかれば、それ以外の日の気圧を正確に知ることができます（すでに積分を学習している場合は、これが「積分定数」に関係すると気づきましたか？）。

もう一つ例を示しましょう。列車が駅を出発してから、最初の 1 時間で 50km 進んだとします。そして次の 1 時間で 60km、さらに次の 1 時間で 30km 進んだとします。この場合も、こういった差分の情報から、元のグラフの形を復元できます。最初に駅にいたことがわかっているので、この場合は現在の位置を正確に知ることができます。

このように変化量を積み重ねていくことで、グラフを復元できます。

微分と積分の関係

微分によって、関数の導関数を得ることができました。導関数とは、変化の様子を記録したものでした。積分の考えでは、変化量を積み上げていくことで元のグラフを復元できることがわかりました。

つまり、積分によって導関数から元の関数を復元できるのです。微分と積分は下の図のような関係になっています。

グラフの形（関数） $\underset{\text{積分}}{\overset{\text{微分}}{\rightleftarrows}}$ 変化の様子（導関数）

ただし、気圧の例でみたように、積分でわかるのはグラフの「形」だけで、具体的な値を知るには、最初の値がわからないといけません。この最初の値がわからないで積分することを「不定積分」とよび、わからない部分を記号Cで表して、次のように表します。

$$f(x) + C \underset{\text{積分}}{\overset{\text{微分}}{\rightleftarrows}} f'(x)$$

最後に、微分はある点における変化を知る道具であり、積分はある点における変化を積み上げることで、全体の様子を復元する道具、という感覚をもっておくとよいでしょう。

登場した主なキーワード（自分の言葉で説明してみましょう）

・微分係数　・導関数　・接線　・差分　・積分定数

まとめ

・値の変化の様子をグラフで表したときに、ある点での傾きを求める操作を微分といい、傾きの値を微分係数と呼びます。
・微分係数をxの関数で表したものを導関数と言います。
・関数$f(x)$の導関数を$f'(x)$で表します。
・微分と積分は互いに密接な関係を持ちます。
・導関数から、積分によって（積分定数を含めた）元の関数を復元できます

伝えたかったこと

・微分はある時点を切り出して、その物事の局所的な変化の様子を知ること。
・積分は、物事の局所的な変化を積み上げることで、全体の様子を知ること。

次への指針

・ここで対象としたグラフは途中で途切れていない（連続である）ということが前提になっています。途切れているかどうかは見れば明らかですが、それを数学的にどう定義するか、ということを大学での解析で最初に学びます。
・物理で学習する物体の運動における、位置、速度、加速度は、それぞれ次のような関係があります。微分と積分は物理現象の理解やシミュレーションにとても役立ちます。

　位置 →（微分）→ 速度 →（微分）→ 加速度
　位置 ←（積分）← 速度 ←（積分）← 加速度