「$\varepsilon - \delta$ 論法による関数の連続の定義」の解説

三谷純

2024.5.10

大学 1 年生を対象とした解析学の授業の中で、次のような論理式（$\varepsilon - \delta$ 論法）によって関数の連続の定義を学ぶことがあります（ここに示しているものは Wikipedia に掲載されている論理式です。教科書によって表記が異なる場合があります)。

$$^{\forall}\varepsilon > 0, ^{\forall} a \in I, ^{\exists}\delta > 0 \; s.t. \; ^{\forall}x \in I[|x-a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon]$$

この文書は、「え。高校で勉強した数学と違いすぎて意味わかんないけど。」と、思ってしまった学生の方々（昔の私を含む）への解説を目的としています。

$\varepsilon - \delta$ 論法による連続の定義が理解できない理由は、大きく次の 2 つに分けられるでしょう。

(1) この論理式を、どのように解読すればよいかわからない

(2) 論理式を解読できても、それがなぜ連続の定義になるのかわからない

(1) に対して、ざっと簡単な日本語に書き下してみると次のようになります（インターネットで検索するといろいろわかりやすい説明が見つかるので、より詳しくはそちらを参照してください。)。

どれほど小さな値の $\varepsilon(> 0)$、どのような値の a (区間 I に含まれる) に対しても、次のような δ が存在する。
「区間 I に含まれるどのような x に対しても、$0 < |x - a| < \delta$ であれば、$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ である。」

日本語にはなったけれど、やっぱりよくわかりません。以降では「(2) 論理式を解読できても、それがなぜ連続の定義になるのかわからない」のケースを対象として、この定義が、どのような考え方に拠っているかを説明してみます。

まず、関数 $f(x)$ が「$x = a$ で連続である」と言ったとき、視覚的には $y = f(x)$ のグラフを描いたときに $x = a$ の前後で途切れずにつながっている状態（図 1 の左)、と言えるでしょう。

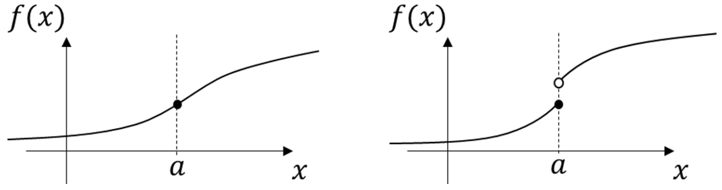

図 1　図 $x = a$ で連続なグラフ（左）と連続でないグラフ（右）

グラフを描いてじっくり眺めてみれば、つながっているかどうか判断できるかもしれませんが、人間の眼に頼るような定義ではいけません。では、どうすればよいのでしょう。

高校で微分を学習したときに、x を少しだけ動かして関数の値の変化を観察する、ということをしました。この「x を少しだけ動かす」というのがポイントです。x を少しだけ動かすと、$f(x)$ の値も少しだけ変化すると予想できますね。x を動かす量をもっと小さくすると、$f(x)$ の値の変化も、もっと小さくなるに違いありません。でも、もし x を動かす量をどれほど小さくしても、$f(x)$ の値の変化は大きいままで全然小さくならないようであれば、なんだか、そこは連続でなくて値がジャンプしている個所じゃないだろうか、という気がします。

そこで、次のような状態であれば $x = a$ において $f(x)$ は連続だと言うことにします。

「x を a から少しだけ動かすのだけど、その動かす範囲を小さく小さく抑えることで、値の変化量 $|f(x)-f(a)|$ をいくらでも小さく抑えることができる（「いくらでも小さく抑えることができる」といってもゼロは含みません）」

$x = a$ の近傍で、値の変化を限りなくゼロにできるのであれば、$x = a$ ではジャンプしてないことを認める。というわけです。

逆に、「x を動かす範囲をどれだけ小さく抑えても、値の変化 $|f(x) - f(a)|$ を小さく抑えることができない」という状態は、$f(x)$ の値がそこ（$x = a$）でジャンプしている、つまり不連続である。といえます。

どうでしょう、なんとなく納得できそうな気がするでしょうか。そうでもない場合には、先ほどの図を眺めながら、グラフが $x = a$ において連続であることの説明として、上の説明が妥当であると言えそうかどうか、3 分くらい考えてみてください[*1]。

さて、このような連続性の判定方法をベースとして、連続の定義を冒頭の論理式（以下に再掲）に近づけてみます。

$$^\forall\varepsilon > 0, ^\forall a \in I, ^\exists\delta > 0 \ s.t. \ ^\forall x \in I[|x-a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon]$$

$f(x)$ が $x = a$ で連続であることを、ε と δ いう記号を使って説明し直してみます。

> $f(x)$ が $x = a$ で連続であるとは、「ε にどのような小さな値を設定しようとも、値の変化 $|f(x) - f(a)|$ を ε よりも小さく抑えるような、x を動かす範囲 $|x-a| < \delta$ が存在する」ということである。

さらに、a の値が区間 I のどこであっても成り立つよ。という条件を加えたものが、冒頭の論理式が言っていることになります。このようにして、関数 $f(x)$ が区間 I 全体で連続であることを表すことができます。

[*1] 歩いているのび太君が、どこでもドアを使った瞬間移動をしていないことを保証するにはどうすればよいか。と考えてみてもいいかもしれません。のび太君を追跡中、ある時刻に突然遠く離れた場所に移動したら、どこでもドアを使ったのだろうと考えられます。観察する時間間隔を短くすることで、その途中にいるのび太君を捉えることができるのであれば、瞬間移動はしていない。と言えそうです