「イプシロン-デルタ論法（ε - δ 論法）による関数の連続の定義」の解説

この解説は、大学で解析学を学び始めたころに関数の連続性の説明でイプシロン-デルタ論法（ε - δ 論法）を学んで、「え。意味わかんないけど。」と、思ってしまった学生の方々（昔の私を含む）を対象としています。

ε - δ 論法が理解できない理由は、大きく次の 2 つに分けられるでしょう。

(1) 次のような「論理式」[1]を、どのように解読すればよいかわからない

$$ {}^{\forall}\varepsilon > 0,\quad {}^{\forall}a \in I,\quad {}^{\exists}\delta > 0\ \ s.t.\ \ {}^{\forall}x \in I[|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon] $$

(2) 論理式が解読できても、それがなぜ連続の定義になるのかわからない

(1)はインターネットで検索するといろいろわかりやすい説明が見つかるので、そちらを参照してください。ここでは、(2)のケースを対象として、連続の定義というものは、そもそもどのような考え方に拠っているかを説明してみます。

まず、関数$f(x)$が「$x=a$で連続である」とはどういう意味でしょう。直感的には、$y=f(x)$のグラフを書いたときに、$x=a$の前後で途切れずにつながっている状態（下図の左)、と言えるでしょう。

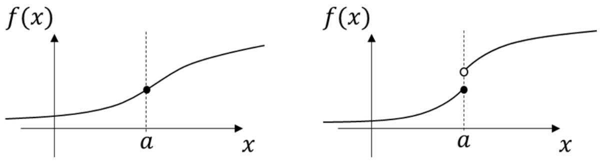

図 $x=a$で連続なグラフ（左）と連続でないグラフ（右）

でも、この「途切れずにつながっている状態」は「連続である」の言い換えに過ぎないので、なんの説明にもなっていません。グラフを描いて、じっくり眺めてみれば、つながっているかどうか判断できるかもしれませんが、人間の眼に頼るような定義ではいけません。では、どうすればよいのでしょう。

高校で微分をならったときに、xをちょこっとだけ動かして関数の値の変化を観察する、ということをしたと思います。この「xをちょこっとだけ動かす」というのがポイントです。xをちょこっと動かすと、$f(x)$の値もちょこっとだけ変化すると予想できますね。でも、もし$f(x)$の値がピョンと跳ね上がったりしたら、なんだか、そこは連続でなくて途切れている個所じゃないだろうか、という気がします。だからと言って「$x=a$ から、xを少し動かしただけなのに、 $f(x)$の値が$f(a)$から大きく変化したら不連続だ」というのでは、あまりに乱暴です（でも考え方としては悪くありません)。そこで、次のように考えます。

[1] Wikipedia の「イプシロン-デルタ論法」のページに掲載されている式です

「$x=a$からxを動かす範囲を、とにかく小さく小さく抑えれば、$f(x)$の値の変化（$|f(x)-f(a)|$）をいくらでも小さく抑えることができる（＊）」という状態であれば連続である。

（「いくらでも小さく抑えることができる」といってもゼロは含みません。「どんなに小さな正の値が指定されても、それよりさらに小さくすることができる」という意味です）

どうでしょう、なんとなく納得できそうな気がするでしょうか。そうでもない場合には、先ほどの図を眺めながら、グラフが $x=a$ において連続であることの説明として、上の文が妥当であると言えそうかどうか、3 分くらい考えてみてください。

逆に、「$x=a$ からxを動かす範囲を、とにかく小さく小さく抑えているのに、それでも$f(x)$の値の変化（$|f(x)-f(a)|$）を小さく抑えることができない」という状態は、$f(x)$の値がそこ（$x=a$）でジャンプしている、つまり不連続である。と言えます。

さて、このような連続性の判定方法を、より厳密にすることで冒頭の論理式（以下に再掲）の表現に近づけてみます。

$$^\forall\varepsilon>0,\quad ^\forall a\in I,\quad ^\exists\delta>0\quad s.t.\quad ^\forall x\in I[|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(a)|<\varepsilon]$$

まず（＊）に書いた連続の説明を、次のように言い換えてみます。

「$f(x)$の値の変化をいくらでも小さく抑えることができるような（$f(x)$の値のジャンプを禁止するような）、xを動かす範囲というものが$x=a$ の周囲に存在する」。

（「$f(x)$の値のジャンプを禁止するような、xを動かす範囲が$x=a$の周囲に存在しない」、ということであれば、xを$x=a$からちょっとでも動かすと値がジャンプしてしまうのだから、そこでは連続で無いわけです。）

つづいて、ε と δ いう記号を登場させて、再び言い換えてみます。

「ε にどのような小さな値を設定しようとも、$f(x)$の値の変化（$|f(x)-f(a)|$）を ε よりも小さく抑えるような、xを動かす範囲（$|x-a|<\delta$）が存在する（ε と δ はともに、0 より大きな値です）」

これで論理式のような表現になりました。

補足しておくと、これは$x=a$で連続であるということを言っているので、aの値がxの区間（I）のどこであっても成り立つよ。という条件を加えたのが冒頭の論理式の意味になります。

三谷純 2023/4/14